6: Trigonometri

Plan for hele året:

- Kapittel 7: Februar/mars
- Kapittel 8: Mars
- Repetisjon: April/mai
- Økter, prøver, prosjekter: Mai - juni

- Ordet **geometri** betyr egentlig jord- (geos) måling (metri). Meter er det samme som mål. For å måle - og spesielt for å måle Jorda – trenger vi **tri-** (tre) **gono-** (kant) **metri** (måling). Dere skal lære at alle figurer med rette sider – og alle romlegemer med rette sider – lar seg måle ved hjelp av trekantberegning: Alle kan deles opp i trekanter.
- Når dere skal finne sider, vinkler, omkrets, areal og høyder i trekanter, har dere lært to hjelpemidler – foruten at man naturligvis kan måle med linjal: **Formlike trekanter** og **Pytagoras'** læresetning. Dessuten veit dere at **vinkelsummen** i en trekant alltid er 180^0.
- Alle trekanter er gitt når dere kjenner **3 ting**: tre sider eller to sider og én vinkel eller ei side og to vinkler eller areal og to sider eller omkrets og to sider eller… Husk på at tre vinkler ikke er nok, dere må ha en lengde i tillegg. Det er nemlig slik at kjenner vi to vinkler, kjenner vi den tredje også.)

1) Dere skal først lære alt om rettvinkla trekanter: Hvordan finne vinklene og sidene som mangler?
2) Deretter skal dere lære alt om vilkårlige trekanter: Hvordan finne vinklene og sidene som mangler?

Dette kan også brukes i en del romgeometri. Og når det gjelder sirkler, regner vi med at dere kan det som trengs. Andre geometriske former vil dere treffe i funksjonslæra seinere.

Dette er med andre ord et spennende kapittel der dere både får repetert mye geometri og fullført det dere begynte på i grunnskolen. Vi skal ikke konstruere nå, men det kan være greitt å ha vinkelmåler, linjal og passer for å kunne tegne fint!

Formlikhet bør kanskje repeteres. **Og Pytagoras' læresetning.** **Se nettsidene!**

Tommy & Tigern, bind 3, side 131,nederst

Oppgaver	Innhold	Dato
6.1, 6.2, 6.3, 6.4 **6.5 (U)** **6.6 (P)**	**3.1 - Definisjon av sinus, cosinus og tangens:** Vi innfører tre begreper som er nyttige for å finne vinkler i alle rettvinkla trekanter. (Seinere vil de bli nyttige for å finne alle tenkelige vinkler i alle slags figurer!) **Sinus:** I en rettvinkla trekant er $\frac{Motstående-katet}{Hypotenus}$ alltid konstant, og vi kaller dette forholdet for *sinus*: ***sin*** på kalkulatoren. **Cosinus:** I en rettvinkla trekant er $\frac{Hosliggende-katet}{Hypotenus}$ alltid konstant, og vi kaller dette forholdet for *cosinus*: ***cos*** på kalkulatoren. **Tangens:** I en rettvinkla trekant er $\frac{Motstående-katet}{Hosliggende-katet}$ alltid konstant, og vi kaller dette forholdet for *tangens*: ***tan*** på kalkulatoren.	**9/2**

Innlevering av innføringa fra kapittel 5!		9/2
Oppgaver	**Innhold**	**Dato**
6.7, 6.8, 6.9 **6.10 (U)**	**3.2 - Sider i rettvinkla trekanter:** Formlene for sinus, cosinus og tangens er egentlig laga for å finne vinkler ved hjelp av sider. Men de kan naturligvis brukes for å finne hva som helst som inngår i formlene. For eksempel en hypotenus eller katet dersom vi kjenner en vinkel og ei side. Å finne sinus, cosinus eller tangens når vi kjenner vinkelen, gjør vi bare med kalkulator eller TI-nspire!	**11/2**

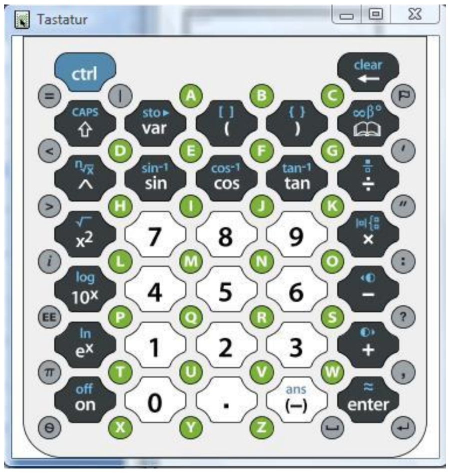
Casio kalkulator:

Skal vi regne med grader som vinkelmål, må vi stille inn på grader:

- Du skal stå med regneskjermen, **RUN-MAT**
- **SET UP - Angle - Deg.** (Det er to valg til, radianer som er et "naturlig" vinkelmål og grades som vi kaller nygrader, og som har 400 grader i en sirkel, 100 i en rett vinkel – et forsøk på å innføre 10-tallsystemet også i grader.)
- Skal du finne sinus til 50 grader: **sin 50 - EXE**, og svaret blir 0,7660. Vi bruker helst 4 desimaler når ikke svaret er en hyggelig brøk. Legg merke til egne taster for sinus, cosinus og tangens.
- Kjenner du allerede en sinus, for eksempel sin x = 0,7660, finner du vinkelen slik: **$\sin^{-1}$ 0.7660 - EXE** og får 49,996, altså 50^0. At vi ikke akkurat får 50^0, som vi skulle hatt, har med avkortinga å gjøre. Men vi oppgir ikke vinkler med flere enn 2 desimaler, ofte bare med 1 desimal. Legg merke til egne taster for $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$, det går ikke an å bruke eksponent, naturligvis: Vi skal ha en "motsatt" funksjon, og det er noe annet!

TI-nspire:

- Du må bestemme vinkelmål slik som på kalkulatoren, og akkurat som på kalkulatoren er dette ei innstilling som blir stående: **Fil - Innstillinger - Dokumentinnstillinger - Vinkel - Grader**. (Det er to valg til, Radianer som er et "naturlig" vinkelmål og Grad som vi kaller nygrader, og som har 400 grader i en sirkel, 100 i en rett vinkel – et forsøk på å innføre 10-tallsystemet også i grader.)
  Husk på at dette skal lagres i systemet: **Legg til i systemet**

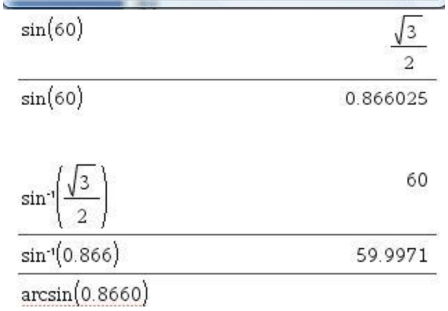


Hvis du bruker tastaturet i TI-nspire, blir metoden som for kalkulatoren:

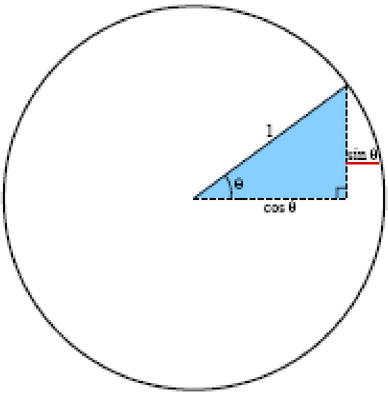
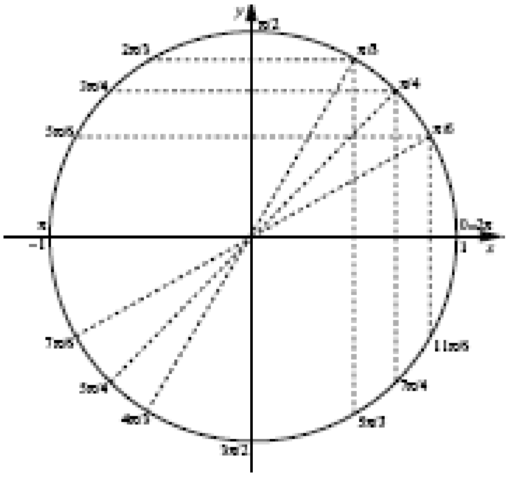
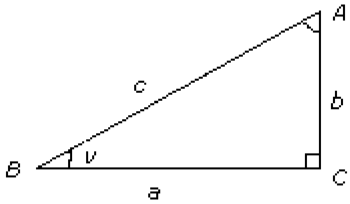
- Skal du finne sinus til 50 grader: **sin 50 - EXE**, og svaret blir 0,7660. Vi bruker helst 4 desimaler når ikke svaret er en hyggelig brøk. Legg merke til egne taster for sinus, cosinus og tangens.
- Kjenner du allerede en sinus, for eksempel sin x = 0,7660, finner du vinkelen slik: **$\sin^{-1}$ 0.7660 - EXE** og får 49,996, altså 50^0. At vi ikke akkurat får 50^0, som vi skulle hatt, har med avkortinga å gjøre. Men vi oppgir ikke vinkler med flere enn 2 desimaler, ofte bare med 1 desimal. Legg merke til egne taster for $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$, det går ikke an å bruke eksponent, naturligvis: Vi skal ha en "motsatt" funksjon, og det er noe annet!

Hvis du heller vil skrive kommandoene, går det også bra:

- Legg merke til at TI-nspire oppgir et eksakt svar der det går an. Skal du ha ett med desimaler, tar du som vanlig <ctrl>+<enter>.
- Dersom du kjenner sinus og skal finne vinkel, må du bruke arcsin. Akkurat tilsvarende gjelder naturligvis for cosinus og tangens.
- Legg stadig merke til forholdet mellom eksakte og tilnærma verdier. Dessuten gjør TI-nspire arcsin om til $\sin^{-1}$ i det øyeblikket di trykker <enter>



6.11, 6.12, 6.13, 6.14 **6.15 (U)**	**6.3 - Spisse vinkler i rettvinkla trekanter:** Når vi kjenner vinkelen, kan vi finne sinus, cosinus og tangens til den. Og omvendt: Når vi kjenner sinus, cosinus eller tangens til en vinkel, kan vi finne vinkelen! Og derved kan vi finne vinklene i rettvinkla trekanter!	**11/2**

Oppgaver	Innhold	Dato
6.16, 6.17, 6.18, 6.19 **6.20 (P)**	**6.4 - Utviding av definisjonen:** Vinkler i en trekant - ikke en rettvinkla - kan være helt opp til 180^0. Derved kan det være nyttig å innføre sin, cos og tan også til vinkler over 90^0. Det gjør vi med en enhetssirkel:  Enhetssirkelen har radius på 1. Dvs. at hypotenusen blir 1, og dermed blir cosinus lik hosliggende katet og sinus motstående. Disse katetene finner vi igjen på henholdsvis *x*- og *y*-aksen. Derved blir sinus positiv også for vinkler mellom 90 og 180 grader. Cosinus blir derimot negativ i denne andre kvadranten. **Supplementsvinkler:** To vinkler som til sammen blir 180^0, kalles supplementsvinkler. For supplementsvinkler *u* og *v* gjelder alltid at $\sin u = \sin v$ og $\cos u = -\cos v$. Men dette ser dere av enhetssirkelen ovafor.	**12/2**
6.21, 6.22, 6.23 **6.24, 6.25(U)**	**6.5 - Arealsetninga:** Figuren viser en rettvinkla trekant. Men arealsetningen gjelder uansett hva slags form trekanten har. Og den fins i tre versjoner:  $T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\angle C = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\angle B$	**16/2**
	Prøve i kapittel 5!	**18/2**
6.26, 6.27, 6.28, 6.29, 6.30	**6.6 - Cosinussetninga:** Cosinussetningen gjelder i alle trekanter, og er en sammenheng mellom alle sidene og en av vinklene. Kjenner vi tre av disse, kan vi finne den fjerde med vanlige likningsregler. Og også den fins i tre varianter, vi velger den som passer os best. Legg merke til at den likner Pytagoras' setning, og blir helt lik når vinkelen vi bruker, er rett: Da er cosinus lik null! $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\angle A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\angle B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\angle C$	**19/2**
6.31, 6.32	**6.7 - Å finne vinkler med cosinussetningen:** Bruken av cosinussetningen blir som vanlige likninger, og vi finner den av de tre variantene som passer oss best utfra hvilke verdier vi allerede kjenner.	**23/2**
6.33, 6.34, 6.35, 6.36 **6.37 (P)**	**6.8 - Sinussetningen:** Dette er en enkel setning som egentlig springer ut av arealsetningen. Den kan brukes for å finne sider og vinkler i trekanter - tilsvarende cosinussetningen, men her er to vinkler og bare to sider involvert. Det fins også her tre muligheter der dere velger hvilke to brøker dere kan ha nytte av, og sette dem lik hverandre. $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$ Denne setninga kan også snues opp-ned: $\frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle C}{c}$	**23/2**

Oppgaver	Innhold	Dato
6.38, 6.39	**6.9 – Sammensatt eksempel:** Her møter dere ei større oppgave som tar for seg mange av teknikkene dere har lært i kapitlet. Det er viktig å se sammenhenger når dere lærer noe, kanskje spesielt i matematikk der alt bygger på noe dere har lært tidligere! Prøv dere på oppgavene!	**25/2**

Det viktigste ved kapitlet er: Å bruke alt dere har lært til å finne alle vinkler og sider i alle trekanter. Som vanlig må vi bruke likningsregler når den ukjente ikke står aleine på venstre side - $\sin 30^0 = \frac{3}{x}$ for eksempel!

Diverse eldre lærestoff som det ikke undervises i lenger – men som er ganske morsomt…

Det fins dessuten en flott arealsetning når dere kjenner alle de tre sidene og ingen vinkler, **Herons formel:** (s er omkrets av trekanten)

$$T = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}$$

Hvis alle sidene er heltallige, og arealet er heltallig, snakker vi om heronske trekanter…

Ikke pensum etter 1975!

Det fins en fjerde brøk i trekanter, **cotangens:** $\cot an v = \frac{1}{\tan v} = \frac{hosliggende - katet}{motstående - katet}$

Og det fins både **tangens- og cotangenssetninger**, som passer bra til sitt bruk:

$$\frac{\tan\frac{\angle A - \angle B}{2}}{\tan\frac{\angle A + \angle B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}, \frac{\tan\frac{\angle A - \angle C}{2}}{\tan\frac{\angle A + \angle C}{2}} = \frac{a-c}{a+c}, \frac{\tan\frac{\angle B - \angle C}{2}}{\tan\frac{\angle B + \angle C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$\cot an \angle A = \frac{c - a \cdot \cos\angle B}{a \cdot \sin\angle B}$$

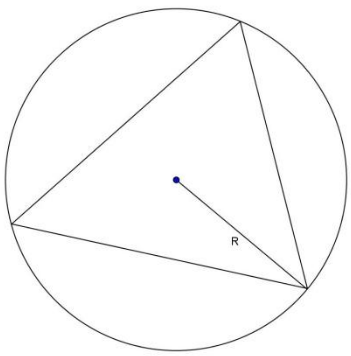
$$\cot an \angle B = \frac{a - b \cdot \cos\angle C}{b \cdot \sin\angle C}$$

$$\cot an \angle C = \frac{b - c \cdot \cos\angle A}{c \cdot \sin\angle A}$$

Ikke pensum etter 1975!

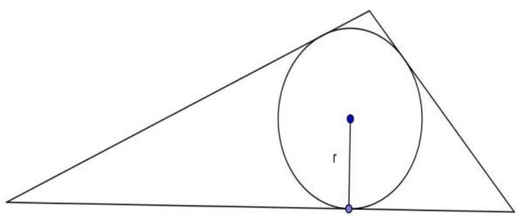
Radien i en trekants omskrevne sirkel har denne lengden:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin\angle A} = \frac{b}{2 \cdot \sin\angle B} = \frac{c}{2 \cdot \sin\angle C}$$



Den innskrevne sirkelen har denne radien, der *s* er omkretsen:

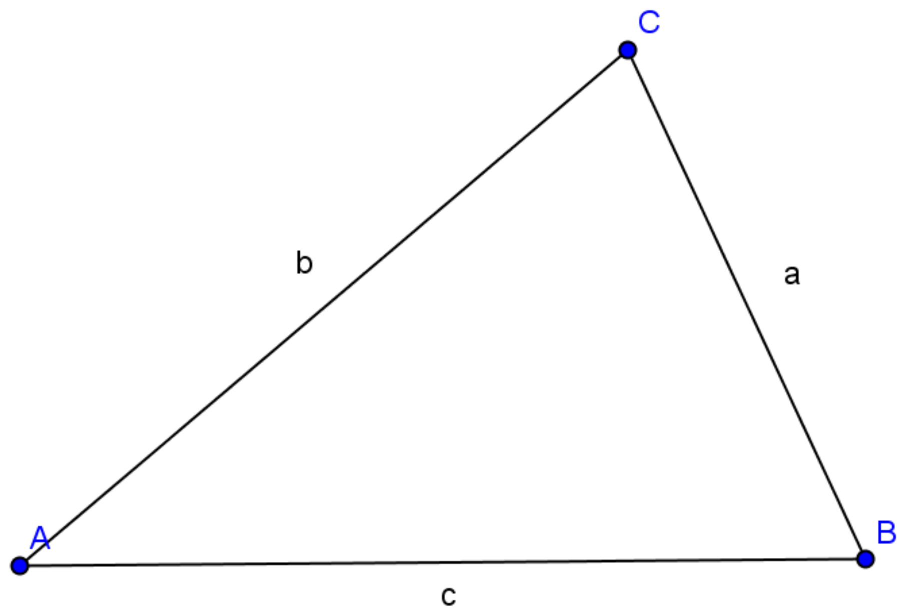
$$r = \sqrt{\frac{\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}{\frac{s}{2}}}$$



Ikke pensum etter 1975!

	Dato
■**Sammendrag av kapitlet - side 220 (Bok 1T):** Dette er stoff som passer på en huskelapp for kapittel 1. ■**Test deg selv - side 221 (Bok 1T):** Utfør testen på egen hand en stille ettermiddag. Deretter retter du utfra løsningene på side 305 - 309. Klarer du halvparten, har du såvidt klart en 3er! En tredel gir deg ståkarakter og fire femdeler er en 5er! ■**Øvingsoppgavene til kapitlet - side 222 - 231 (Bok 1T):** Fasit side 343 - 345.	
Innføring til kapitlet: 6.80, 6.81, 6.102	**26/2**
Prøve i kapittel 6	**11/3**

Oppsummering: Alt om trekanter:



Noen trekanter er *rettvinkla* og noen er *formlike* med andre. Hvis slikt er tilfelle, bruker vi ikke de tre setningene vi kjenner fra kapittel 5, men:

- Pythagoras' læresetning
- Regelen om forholdstall ved formlike trekanter
- Definisjonen til sinus: $\dfrac{Motstående - katet}{Hypotenus}$
- Definisjonen til cosinus: $\dfrac{Hosliggende - katet}{Hypotenus}$
- Definisjonen til tangens: $\dfrac{Motstående - katet}{Hosliggendekatet}$

Men skal vi arbeide med andre trekanter, eller firkanter (som kan deles i 2 trekanter) eller femkanter (som kan deles i tre) – og så videre – kan vi finne ut alt, dvs. sider og vinkler, ved hjelp av tre setninger som dere nå har lært! Alle trekanter blir da som den ovafor, og navnene vi har satt på hjørner og sider, er vanlig standard som dere finner igjen i formlene.

Kjenner vi tre størrelser i en trekant, kjenner vi trekanten og kan finne resten:

A) Vi kjenner tre sider: Vinkler finner vi ved å bruke cosinussetninga.

B) Vi kjenner to vinkler og ei side: Tredje vinkel finner vi med vinkelsummen i en trekant og de andre to sidene med sinussetninga.

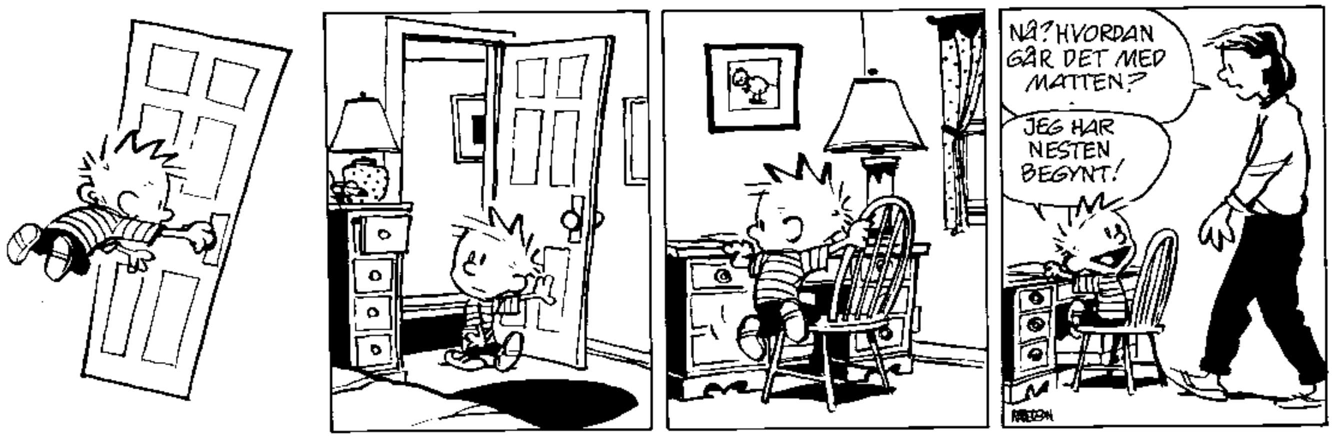
C) Vi kjenner to sider og vinkelen imellom: Første finner vi den tredje sida med cosinussetninga. Deretter kan vi gjøre som i B) for å finne en vinkel til, og deretter den siste vinkelen.

D) Vi kjenner to sider og en vinkel som ikke ligger mellom sidene: Det enkleste er sinussetninga for å finne en vinkel til, og deretter fortsette som i B). Men her går det også an å bruke cosinussetninga for å finne den siste sida. Problemet er riktignok at vi får ei ukjent side både i annen og første grad, og må bruke *abc*-formelen for å komme fram – men det går!

E) Skal vi finne arealer, må vi finne fram til to sider og vinkelen imellom, og så sette inn.

Uvanlige muligheter fins også:
F) Har vi oppgitt arealet, må vi bruke arealsetninga baklengs for å finne flere sider og vinkler.
G) Skal vi finne omkrets, trenger vi alle sidene.
H) Har vi oppgitt omkrets og to av sidene, kan vi regne ut tredje side og bruke A).
I) Har vi oppgitt omkrets, ei side og en vinkel, må vi nok sette opp to likninger med to ukjente.
J) Har vi oppgitt en høyde sammen med sider og vinkler, må vi bruke den gamle setninga for areal, med grunnlinje og høyde, og sette den lik en høvelig utgave av arealsetninga. Her kan det nok også bli to likninger og to ukjente.
K) Har vi oppgitt høyde, areal og omkrets, har vi en morsom oppgave foran oss!

Mangekanter:
L) Dersom vi jobber med firkanter som vi deler inn i høvelige trekanter, går vi først løs på en trekant der vi kjenner tre ting: Dette er en god hovedregel som nesten alltid går.
Går den ikke, må det flere likninger med flere ukjente til!
M) Av og til må vi trekke høyder som hjelpelinjer i firkanter, femkanter osv.
N) Og det fins flere kombinasjoner: Men husk på at dersom dere kjenner tre ting i en trekant, kan oppgava løses.



Tommy & Tigern, bind 3, side 165, øverst