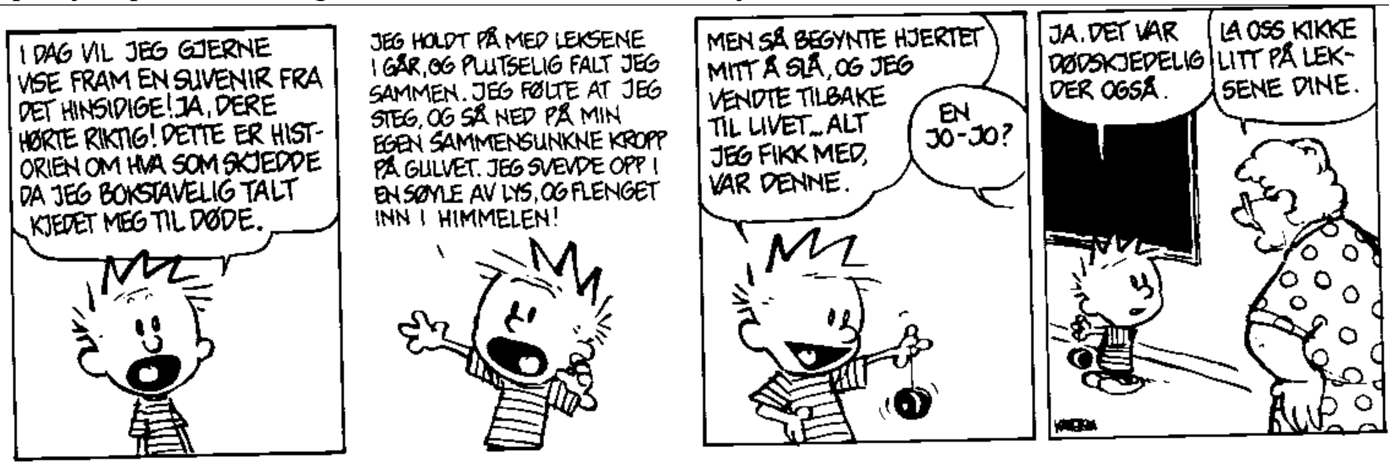
R2 – 2008/09 - Kapittel 2: 16. september – 24. oktober 2008

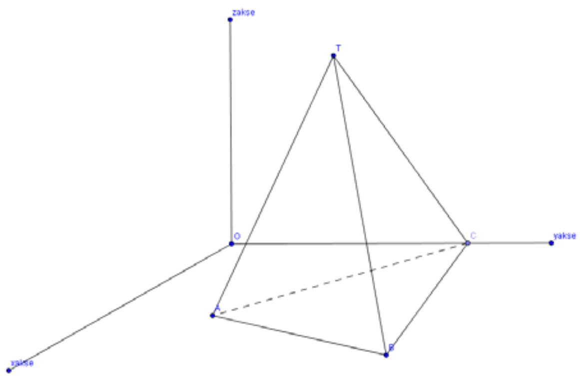
Plan for skoleåret 2008/2009: *Kapittel 2: 16/9-24/10. Kapittel 3:27/10 – 21/11. Kapittel 4: 24/11 – 23/1. Kapittel 5: 26/1 – 13/2. Kapittel 6: 16/2 – 13/3. Kapittel 7: 16/3 – 3/4. Prøver på 2 eller 1 skoletime etter hvert kapittel. Én heildagsprøve i hver termin. En del prøver vil være uten hjelpemidler.*
Repetisjon, prøver, muntlig, økter, diverse arbeid: Påske – juni.

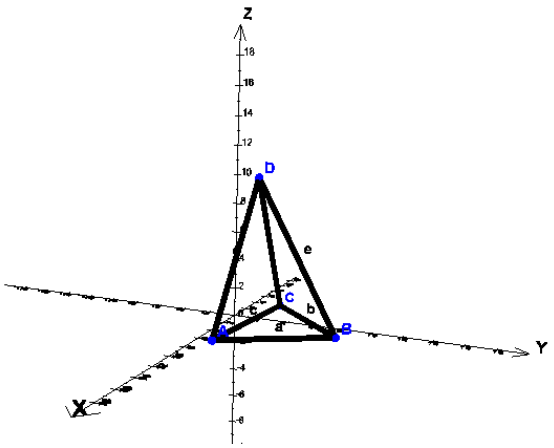


Tommy & Tigern bind 3 side 231

Vektorer og geometri i rommet:

Dette er et GeoGebra-kapittel: Dere kommer langt med Geogebra, men det er vanskelig å tegne i 3 dimensjoner. Prøv å laste ned en testversjon av GeoGebra 3D: http://sourceforge.net/projects/geogebra3d.
Å tegne 3 dimensjoner, altså i rommet, på et ark eller en skjerm som er i 2 dimensjoner, er naturligvis egentlig umulig, men det går an å tegne omtrentlig.





Figuren til høyre viser en trekantet pyramide i et 3D-koordinatsystem tegna med GeaoGebra i 2 dimensjoner. Figuren til venstre er laga i GeoGebra 3D der vi kan definere punkt og linjer med koordinater. Denne (meget foreløpige) versjonen av GeoGebra er svært primitiv og tungvint å bruke! Men det går an å prøve seg litt fram inntil det dukker opp noe bedre.

Poenget er i alle fall: Dere må tegne noen figurer i dette kapitlet. Og det er viktig at de er gode!

Kladd	Innhold	Dato
2.1, 2.2 **2.3(U)**	**2.1: Pyramider:** En pyramide består av 4 plan eller flere. Eksemplet i boka har ett grunnplan og fire plan som utgjøre sideflatene. For å få full kontroll over pyramiden, må vi være i stand til å beregne alle lengder, høyder, vinkler, flater og volumet! Og i matematikken vil vi alltid ha **full kontroll**. I hvert plan bruker vi det vi veit om trekantberegning fra før av: Pytagoras, formlikhet og sinus- og cosinussetninga. I tillegg må vi finne vinklene mellom planene. Knepet er å tenke seg at vi skjærer pyramiden med nye plan der vinklene vi skal finne blir vinkler i trekanter (eller firkanter) slik at vi kan bruke pytagoras osv. Husk på at vinkelen mellom to plan alltid er den minste vinkelen vi finner mellom planene! Og volumformelen for en pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	**16/9**
2.4, 2.5, 2.6, 2.7	**2.2: Vektorkoordinater i rommet:** Vi gjør som vi gjorde i planet men føyer til en tredje koordinat for høyden over *xy*-planet, en *z*-koordinat. Alle regnereglene for vektorer i planet gjelder stadig, men vi får en koordinat til å konsentrere oss om.	**18/9**

Repetisjon av vektorkapitlet, kapittel 3, i R1:

3.1 – Vektorer: Når 25N + 25N = 25N: Eller enda verre: 25N + 25N + 25N = 0N. Dette strider åpenbart mot ordinær matematikk og tallregning, men kan godt være riktig når retninga på disse størrelsene er ulike. Hittil har all matematikk hatt samme "retning": 25 kr + 25 kr = 50 kr. Eller motsatt "retning": 25 kr + (-25) kr = 0 kr. Eller de har hatt forskjelling benevning: 25 bananer + 25 appelsiner = 25 bananer + 25 appelsiner (og *ikke* fruktkompott). En vektor har både størrelse og retning, en skalar har bare størrelse. To vektorer er like dersom de har samme størrelse og samme retning. Og vi adderer to vektorer ved å henge dem på hverandre i en kjede. NB: Ta vare på retninga! En vektor har både lengde og retning. Når to vektorer har samme retning (ligger parallelt) og er like lange, er de like. Når to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er motsatte med samme lengde, har vi: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ eller $\vec{u}=-\vec{v}$.

3.2 – Tall multiplisert med vektor. Regneregler: En vektor multiplisert med en konstant *k* er en ny vektor med samme eller motsatt retning av den opprinnelige, og *k* ganger så lang. Er *k* positiv, har de samme retning, ellers motsatt.

3.3 – Parallelle vektorer. Basisvektorer: Når to vektorer og er parallelle, uansett om retninga er lik eller motsatt, kan vi alltid skrive: $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ der *k* er en positiv eller negativ konstant. Hvis vi definerer to ikke-parallelle vektorer og i et plan, kan vi ved hjelp av de to lage alle vektorer vi kan tenke oss i planet ved hjelp av dem. En hvilken som helst vektor kan skrives slik: $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

3.4 –Mediansetninga. Vektorer inn til skjæringspunkter: Mediansetninga sier at vi trekker ei rett linje i en trekant til midten av motstående side. Linjene skjærer hverandre i ett punkt og deles i forholdet 1:2. For å finne en vektor til et punkt, lager vi ei likning der vi finner to ruter som beskriver vektoren, og setter dem lik hverandre, og løser likninga.

3.5 – Størrelse. Komponenter. Skalarprodukt: Et skalarprodukt er én av to måter å multiplisere to vektorer, Svaret blir et tall, en skalar, og ikke en vektor. Tallet forteller oss noe om hvordan de to vektorene virker i lag. Er tallet null, står de vinkelrett på hverandre. Er det et stort positivt tall, drar de i omtrent samme retning. Og er det stort og negativt, tilsvarende i motsatt retning. Definisjonen kan se underlig ut, men den er nyttig!

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

Å multiplisere med cosinus til vinkelen mellom to vektorer, vil egentlig si at vi legger den ene vektoren parallelt med den andre, slik at de virker langs samme retning, men da krymper den ene vektoren: Vi kaller det en projeksjon av en vektor. Undersøker vi en vektor langs *x*-aksen, lager vi en horisontalprojeksjon. Langs *y*-aksen, blir det en vertikalprojeksjon, og faktoren vi ganger med, er alltid cosinus til vinkelen! Når et skalarprodukt mellom to vektorer er lik null, er de normale!

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Skalarprodukt er ikke et vanlig produkt, men av og til kan vi tenke vanlig produkt: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\overrightarrow{bd}$ og liknende. Spesielt er skalarproduktet nyttig i forhold til arbeid! $W=\vec{F}\cdot\vec{s}$ Og ved bruk av vektorer får vi med kraftas retning i forhold til vegens retning!

3.6 – Lengder og vinkler: Vi kan regne med skalarprodukt på vanlig måte. Husk på hva som er vektor og hva som er tall!

$$\vec{p}^{\,2}=\left|\vec{p}\right|^2,\left|\vec{p}\right|=\sqrt{\vec{p}^{\,2}}$$

$$\cos\angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|}$$

3.7 – Vektorkoordinater: Når vi legger vektorer i et koordinatsystem, uttrykker vi vektoren med en *x*-komponent og en *y*-komponent i en vektorparentes. Vi går fra rumpe til spiss, og oppgir hvor mange enheter bort og hvor mange enheter opp vi må gå for å komme fram. [3, 5] er en vektor som kan starte hvor som helst: Vi går fra startpunktet 3 mot høyre og 5 opp. Legg merke til at vi går to kateter og vektoren blir en hypotenus! Regnereglene er logiske og enkle:

$$t[x,y]=[tx,ty],[x_1,y_1]+[x_2,y_2]=[x_1+x_2,y_1+y_2],$$

$$[x_1,y_1]-[x_2,y_2]=[x_1-x_2,y_1-y_2]$$

$$[x,y]=[a,b]\Leftrightarrow x=a\vee y=b$$

Enhetsvektorene kan være nyttige: $\vec{e}_x=[1,0],\vec{e}_y=[0,1]$

3.8 – Vektor mellom punkter: Å gå fra ett punkt til et annet som en vektor, betyr atvektoren er forskjellen mellom spissen og rumpa til vektoren. Vektoren fra $A(x_1,y_1)$ til $B(x_2,y_2)$ blir da: $\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1,y_2-y_1]$ Og det er lett å kontrollere på en figur, i koordinatsystemet, at det stemmer.

3.9 – Koordinatformelen for skalarproduktet: Formelen for skalarproduktet i koordinatsystemet, er også logisk og grei:

$[x_1,y_1]\cdot[x_2,y_2]=x_1x_2+y_1y_2$, altså ikke lenger en vektor, men en skalar, et tall.

3.10 – Parameterframstilling: Parameterframstilling er en elegant måte å framstille funksjoner på, og vi bruker det i vektorlæra. I stedet for å la *x* være et tall vi velger for å fine *y*-er, lager vi nå en parameter, *t*, som gir oss *x* og *y*. Ei rett linje kan se slik ut:

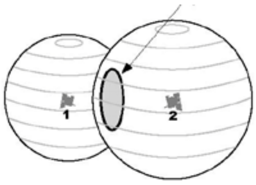
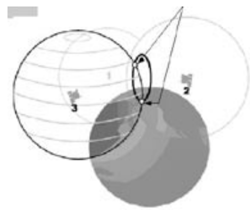
$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$$

der vi kan finne alle punkt (x,y) på grafen ved å velge ulike *t*-er. Dessuten skal vi legge merke til at punktet (x_0,y_0) er et fast punkt på grafen og at vektoren $[a,b]$ har samme retning som den rette linja. Vi kaller den gjerne en retningsvektor.

Kalkulator: Kalkulatoren er naturligvis ekspert på parameterframstilling også. Hvis dere er inne på GRAPH eller TABLE, må dere slå om til parameterframstilling: TYPE(F3) – Parm(F3). Så kan dere skrive inn Xt1 og Yt1, altså parameteruttrykkene for *x* og for *y*. Når dere trykker på variabeltasten, kommer det T i stedet for *x*. Skal dere ha en tabell, velger dere start og slutt for parameteren *t*, og nå må dere være litt lure. *t*-en er ikke så enkel som *x*-en var. Husk også på at step/pitch ikke nødvendigvis er 1! Legg merke til at både *x*, *y* og *t* kommer i tabellen!

3.11 – Parameterframstilling for kurver: Når parameteren *t* bare er i første grad som ovafor, er grafen ei rett linje. Dersom *t* opptrer med ulike eksponenter, altså ikke 1, er det snakk om krumme grafer. Ellers er systemet det samme. En stående parabel har første grad for *x* og andre grad for *y*. Bytter vi om disse to, blir det en liggende parabel.

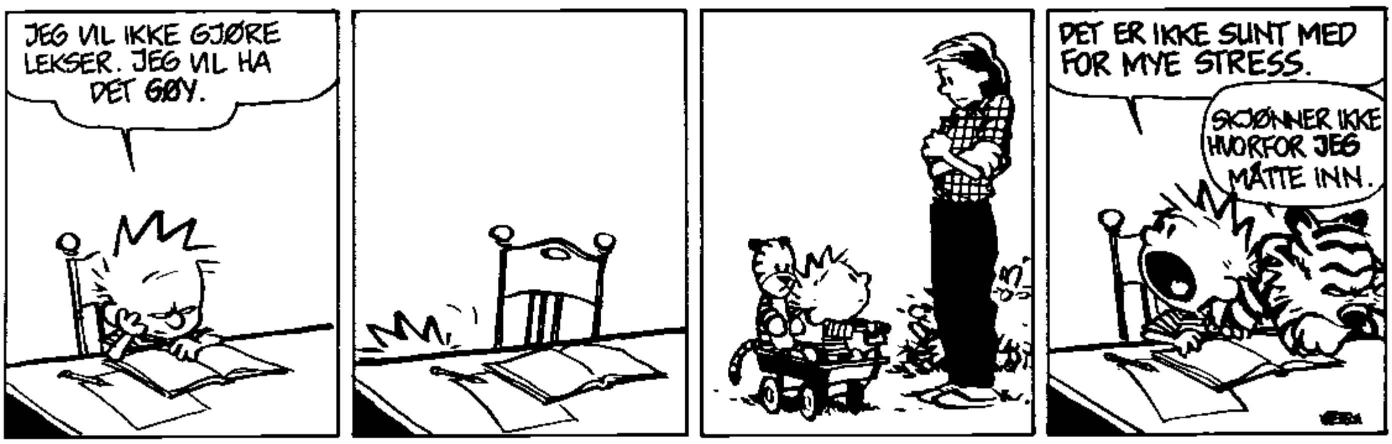
Kladd	Innhold	Dato
	Husk prøve i kapittel 1, nesten ingen hjelpemidler – bare en autorisert jukselapp!	22/9
2.8, 2.9, 2.10 2.11(U)	**2.3: Skalarproduktet. Lengder og vinkler i rommet:** Alt det dere har lært tidligere, gjelder naturligvis ennå. Det nye er at dere må passe på at det er tre koordinater å holde styr på! **Skalarproduktet:** $[x_1, y_1, z_1]\cdot[x_2, y_2, z_2] = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$ **Lengden av en vektor:** $\|[x,y,z]\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **Vinkel mellom vektorer kommer direkte frå skalarproduktet:** $\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ **Avstandsformelen:** $\overrightarrow{AB} = [x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1] \Rightarrow AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$	25/9
2.12, 2.13, 2.14 2.15(U)	**2.4: Parameterframstilling for rette linjer:** Se formelen for rett linje i planet! $l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_{01} + ct \end{cases}$ Husk på at retninga for linja er den samme som for vektoren med koordinatene [*a*, *b*, *c*] og vi får et fast punkt på linja ved å sette $t = 0$. Ved å velje ulike *t*-verdier, finner vi dessutan så mange punkt på linja som vi vil.	29/9
2.16, 2.17, 2.18 2.19(U)	**2.5: Vektorproduktet:** Endelig er vektorproduktet tilbake på pensum igjen! Dette er en annen måte å multiplisere vektorer på, og resultatet denne gangen er en ny vektor som står vinkelrett på de to opprinnelige. Lengden på et vektorprodukt er: $\|\vec{p}\times\vec{q}\| = \|\vec{p}\|\cdot\|\vec{q}\|\cdot sin\angle(\vec{p},\vec{q})$ - dette er naturligvis en skalar, et tall, og ingen vektor! Vektorproduktet er definert litt komplisert, og boka innfører determinanter. Lær dere huskeregelen: $[p_1, p_2, p_3]\cdot[q_1, q_2, q_3] = [p_2q_3 - q_2p_3, p_3q_1 - q_3p_1, p_1q_2 - q_1p_2] = \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{matrix} \times \begin{matrix} p_3 \\ q_3 \end{matrix} \times \begin{matrix} p_1 \\ q_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{matrix}$ Ellers er det noen overraskelser når det gjelder regneregler: $\vec{q}\times\vec{p} = -(\vec{p}\times\vec{q})$ Rekkefølgen betyr noe, og det har sammenheng med vinkelen: Høyrehandsregelen gjelder! $\vec{p}\parallel\vec{q} \Longrightarrow \vec{p}\times\vec{q} = \vec{0}$ Legg merke til denne, og husk tilsvarende for skalarproduktet! $s\vec{p}\times t\vec{q} = st(\vec{p}\times\vec{q})$ $\vec{p}\times(\vec{q}+\vec{r}) = (\vec{p}\times\vec{q}) + (\vec{p}\times\vec{r})$	30/9
2.20, 2.21, 2.22 2.23(U)	**2.6: Likningsframstilling for plan:** Et (flatt) plan er den endimensjonale grafen i rommet, akkurat som linja er den endimensjonale grafen i planet! Et plan gjennom punktet (x_0, y_0, z_0) og med normalvektoren $[a,b,c]$har linkningen: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+(z-z_0)=0$ eller $ax+by+cz+d=0$ der *d* må beregnes utfra punktet. **Skjæring** med aksene får vi når to og to av koordinatene er lik null: *x*=0 og *y*=0 gir skjæringa med *z*-aksen, for eksempel, og punktet utfra siste formel blir $(0,0,-d/c)$. Et plan er ofte gitt ved hjelp av tre punkter i planet, og tilsvarende som med rette linjer kan vi da finne planets likning ved hjelp av tre likninger med tre ukjente. (De tre punktene kan naturligvis ikke ligge på ei rett linje!)	6/10
2.24, 2.25, 2.26, 2.27	**2.7: Avstand fra punkt til plan:** Sett de ulike verdiene for *x*, *y* og *z* inn i likninga for planet. Finn parameteren *t* i skjæringspunktet og sett den inn i uttrykkene for koordinatene *x*, *y* og *z*. Vi har dessuten en avstandsformel: Når planet er $ax + by + cz + d = 0$ og punktet $P(x_1, y_1, z_1)$, blir avstanden *q* lik:$q = \frac{\|ax_1+by_1+cz_1+d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	9/10
2.28, 2.29, 2.30 2.31, 2.32(U)	**2.8: Avstand mellom punkt og linje og mellom to linjer:** Avstanden *q* fra punktet *P* til linja *l* gjennom punktet *A* og med retningsvektoren $\vec{v_l}$ er $q = \frac{\|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{v_l}\|}{\|\vec{v_l}\|}$. Egentlig skal det mye til for at to linjer i rommet skjærer hverandre: Tenk dere at dere kaster to spyd så skjønner dere at det er vanskelig eller nærmest umulig å krysse de to banene! Skal vi finne avstanden mellom de to linjene, tenker vi oss et plan gjennom den ene linja. Dette planet skal også være parallelt med den andre. Når vi har gjort dette, kan vi finne avstanden mellom planet og den andre linja, det vil være den minste avstanden mellom de to linjene! Vi bruker vektorprodukt for å finne normalen til plan gjennom begge linjene. Legg planet gjennom den ene linja. Velg et punkt på den andre linja og finn avstanden!	13/10
2.33, 2.34, 2.35 2.36(U)	**2.9: Parameterframstilling for plan. Likning for linje:** Ei linje er danna av en (retnings)vektor og et punkt. Tilsvarende er et plan danna av to ikkeparallelle vektorer og et punkt, og parameterframstillinga for et plan blir som for ei linje, men med to parametre: $\alpha: \begin{bmatrix} x = x_0 + u_1\cdot s + v_1\cdot t \\ y = y_0 + u_2\cdot s + v_2\cdot t \\ z = z_0 + u_3\cdot s + v_3\cdot t \end{bmatrix}$ Parametrene, det faste punktet og de to vektorene leser dere greit ut av formelen!	14/10

Kladd	Innhold	Dato
2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42 **2.43(U)**	**2.10: Areal og volum med vektorprodukt:** Vektorproduktet er et fantastisk hjelpemiddel for å finne arealer og volum, arbeid som ville vært svært komplisert uten dette hjelpemiddelet. Areal av **trekant** der de to vektorene spenner ut figuren: $= \frac{1}{2}\lvert\vec{p}\times\vec{q}\rvert$ Areal av **parallellogram** der de to vektorene spenner ut figuren: $F = \lvert\vec{p}\times\vec{q}\rvert$ Volum av **parallellepiped**, ei kasse der vinklene ikke nødvendigvis er rette, men sidene parallelle, og der de tre vinklene spenner ut figuren: $V = \lvert(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{q}\rvert$. Tilsvarende blir volumet av en **trekantet pyramide** spent ut av vektorene: $V = \frac{1}{6}\lvert(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{q}\rvert$	**16/10**
2.44, 2.45, 2.46 **2.47(U)**	**2.11: Likningsframstilling for kuleflate:** Denne likner naturligvis på sirkelformelen i det 2-dimensjonale koordinatsystemet: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ der sentrum er punktet (x_0, y_0, z_0) og radien r.  GPSer er basert på kunnskaper om skjæring mellom kuleflater. En GPS (et instrument som måler avstand til satellitter) tenker kuleflater: To kuleflater skjærer hverandre i en sirkel. Tre kuleflater kan skjære hverandre i to punkter. Hvis GPSen veit omtrent hvor vi er på Jorda, på rett kart for eksempel, vil den finne det riktige punktet.	**20/10**
2.48, 2.49, 2.50 **2.51, 2.52(U)**	**2.12: Kuler. Parameterframstilling for kuleflater:** Husk dessuten på de "gamle" formlene for volum $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ og overflate $4\pi r^2$ av ei kule. Parameterframstilling for ei **kule** med radius r er: $K\colon \begin{bmatrix} x = 3\cdot coss\cdot cost \\ y = r\cdot sins\cdot cost \\ z = r\cdot sint \end{bmatrix}$	**23/10**
2.53, 2.54 **2.55(U)**	**2.13: Vektorer i rommet. Plan og parallell*i*tet:** Hvis punktet A og de to vektorene ligger i planet, gjelder ekvivalensen $\overrightarrow{AP} = s\vec{u} + t\vec{v}$, der s og t er tall. Ikke glem disse sammenhengene: Parallelle vektorer: $\vec{p} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow \vec{p} = t\cdot\vec{q}$ Tre vektorer i samme plan: $\vec{p} = s\vec{u} + t\vec{v}$	**27/10**
2.56, 2.57 **2.58(U)**	**2.14: Regning med skalarprodukt. Vektor vinkelrett på plan:** Husk formelen for skalarprodukt $\vec{p}\cdot\vec{q} = \lvert\vec{p}\rvert\cdot\lvert\vec{q}\rvert\cdot cos\angle(\vec{p},\vec{q})$ og for lengden av en vektor $\lvert\vec{p}\rvert = \sqrt{\vec{p}^2}$ Når en vektor er vinkelrett på et plan, vil vektoren være vinkelrett på alle vektorer i planet, spesielt på de to vektorene som spenner ut planet. En vektor som bare er vinkelrett på ei linje i et plan, er ikke nødvendigvis vinkelrett på planet. Husk også på den utvidete kvadratsetninga: $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.	**28/10**
2.59, 2.60	**2.15: Sammensatte eksempler:** Her møter dere større oppgaver som tar for seg mange av teknikkene dere har lært i kapitlet. Det er viktig å se sammenhenger når dere lærer noe, kanskje spesielt i matematikk der alt bygger på noe dere har lært tidligere! Prøv dere på oppgavene!	**30/10**

Sammendrag av kapitlet - side 70 (Bok R2): Dette er stoff som passer på en huskelapp for kapittel 1.
Test deg selv - side 71 (Bok R2): Utfør testen på egen hand en stille ettermiddag. Deretter retter du utfra løsningene på side Klarer du halvparten, har du såvidt klart en 3er! En tredel gir deg ståkarakter og fire femdeler er en 5er!
Øvingsoppgavene til kapitlet - side 72 - 89 (Bok R2): Fasit side 307-314.

Innføring til kapitlet: 2.155, 2.156	30/10
Prøve i kapitlet:	

Tommy og Tigern (Calvin and Hobbes):



Bind 3 side 233