Tempoplan: Kapittel 6: 28/1 – 22/2. Kapittel 7: 22/2 – 25/3. Da er vi ferdig i god tid til påske: Resten av tida – repetisjon og prøver.

5: Grenseverdier og derivasjon

I fjor lærte dere litt om derivasjon og om integralregning. Derivasjon er rett og slett utregning av forandring. I matematikken kan vi definere denne forandringa veldig enkelt: Et fenomen kan beskrives med en graf til en funksjon. Forandringa til fenomenet vil si stigningstallet til grafen. Når det gjelder rette linjer, er stigninga og derved stigningstallet fast. En krum graf vil derimot endre stigninga hele tida. I praksis er stigninga, den deriverte, lik stigninga til tangenten til grafen. Enkelt og greit. Men i teorien, der vi skal finne våre regneregler, er dette et vanskelig fenomen!

For å studere stigning for en krum graf, tenker vi oss at vi velger et par punkter på grafen og trekker den rette linja mellom dem. Denne linja er *nesten* lik tangenten. Hvis vi lager avstanden mellom de to punktene liten, blir linja mellom dem enda mer lik tangenten. Og vi skjønner at hvis vi lager avstanden mellom de to punktene uendelig liten – altså slik at den nærmer seg null – vil linja og tangenten bli helt like, og derved ha samme stigningstall.

Vi kan ikke lage noe uendelig lite uten å lage det til null i virkeligheten. Og null kan vi ikke bruke, for da har vi bare ett punkt. Så vi må tenke oss ei tenkt grense rett før vi når null. Dette er avansert og vanskelig, men det gir oss et grenseoverskridende verktøy i matematikken – den deriverte! Fra og med den deriverte, og seinere den integrerte, har matematikken kommet opp på et høyere plan. Det samme har anvendelsesmulighetene for matematikk!

For å forstå denne *deriverte*, må vi også forstå begrepet *grense*, så vi må se på hva *grenseverdier* egentlig er for noe!

Tommy og Tigern:

Bind 3, side 131n

Kladd	Innhold	Dato
	Innføringa til kapittel 4: 4.124, 4.132, 4.133j, 4.135g	**3/1**
5.1, 5.2, 5.3, 5.4 **5.5 (U)**	**5.1 - Grenseverdier:** Det greske ordet *limes* betyr grense, som i *limit* på engelsk. Vi bruker det matematisk slik, forkorta: $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = A$ leses som ”lim f av x når x går mot a, er A.” Eller på ”norsk”: ”Når x går mot a i funksjonen f(x), nærmer funksjonsverdien seg A.” Altså: Når $x \longrightarrow a$ vil $f(x) \longrightarrow A$ Vanligvis finner vi grenseverdien rett og slett ved å sette inn verdien x skal nærme seg direkte og regne ut svaret. Eller vi kan se det av en graf. Men i noen tilfelle vil både teller og nevner i en brøk bli null! Vi kan stadig finne svaret ved å se på grafen, men regnestykket må vi behandle annerledes: Når brøken bli til 0/0, skal vi kunne forkorte den. En faktor må være lik *x* - *a*: Forkort!	**3/1**
	15 minuttersprøve uten hjelpemidler!	**7/1**
5.6, 5.7, 5.8, 5.9 **5.10 (U)**	**5.2 – Grenseverdier når *x* vokser over alle grenser:** Vi bruker et spesielt symbol for det som er uendelig langt til høyre eller venstre på tallinja: $+\infty$ og $-\infty$. Ser vi på graf, får vi fort en mistanke. Skal vi regne, må vi tenke oss hva som skjer når *x* blir stor, enorm. Av og til ser vi det lett, men av og til må vi få *x*-uttrykket i nevner. Når en nevner vokser mot uendelig, går jo brøken mot null! Også her må vi regne med å forkorte brøker, eller i det minste prøve om det går. Brøken ∞/∞ kan akkurat som 0/0 være hva som helst!	**7/1**

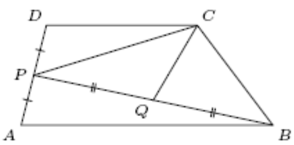
Kladd	Innhold	Dato
5.11, 5.12,	**5.3 – Definisjon av den deriverte:** Vi bruker ideen om tangent, og om to punkt som nærmer seg hverandre. Definisjonen blir: $f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	10/1
5.13, 5.14, 5.15	**5.4 – Regneregler ved derivasjon:** De første reglene er repetisjon fra i fjor. Husk på at grunnlaget for derivasjon alltid er å finne forandring, dvs. stigningstallet til et funksjonsuttrykk: $f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$ $f(x) = ax \Longrightarrow f'(x) = a$ Potensregelen: $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ To generelle regler, den første gjelder naturligvis også med minus: $f(x) = u(x) + v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ $f(x) = a \cdot u(x) \Longrightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$ De neste 3 reglene følger direkte av potensregelen, men kan være kjekke å notere seg spesielt. $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \Longrightarrow f'(x) = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}+1} = \frac{x\sqrt[n]{x}}{n}$ $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}+1} = \frac{mx\sqrt[n]{x^m}}{n}$ Spesielt kjekke er disse to som også følger av potensregelen, og som dere bør huske: $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	11/1
	15 minuttersprøve uten hjelpemidler!	14/1
5.16, 5.17 5.18 (U)	**5.5 – Kjerneregelen:** Dersom et uttrykk er komplisert, et uttrykk inne i et annet, må vi bruke en spesiell regel, kjerneregelen, der vi finner kjerner. Så skreller vi oss innover ved å derivere det ytterste skallet først, ganger med den deriverte av neste skall, ganger med derivert av neste skall osv. helt til vi har derivert oss helt inn til kjernen. Kanskje greiest å vise med et par eksempler: $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2x}} \cdot (x^3 - 2x)' = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$ $f(x) = (17x+4)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(17x+4)^2 \cdot 17 = 51(17x+4)^2$ Vi kan godt ha kjerne innafor kjerne innafor kjerne, og bare passe på å derivere alle lag i riktig rekkefølge – som vi skreller en løk.	14/1
5.19, 5.20, 5.21, 5.22	**5.6 – Derivasjon av eksponentialfunksjoner:** Den deriverte av e^xer det enkleste vi har av derivasjonsregler – ingen ting skjer. Her er reglene for ulike potenser med ulike grunntall: $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$ $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = lna \cdot a^x$ $f(x) = a^{kx} \Longrightarrow f'(x) = k \cdot lna \cdot a^{kx}$	17/1
5.23, 5.24, 5.25 5.26 (U)	**5.7 – Derivasjon av logaritmefunksjoner:** Vi kan bare ta logaritmer til positive tall! Ellers er regelen slik: $f(x) = lnx \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$	17/1
	15 minuttersprøve uten hjelpemidler!	21/1
5.27, 5.28 5.29 (P)	**5.8 – Derivasjon av produkter:** I mange tilfeller ganger vi ut produkter og trenger ikke denne regelen. Men noen ganger er det uhøvelig å gange ut, og da bruker vi en litt komplisert regel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	21/1
5.30, 5.31 5.32 (U)	**5.9: – Derivasjon av brøkfunksjoner:** Brøker kan en sjelden gang forkortes, men ellers er det lite vi kan gjøre med dem, og da er regelen litt komplisert. Husk på at brøkuttrykk der *x* enten bare er i teller eller bare i nevner, kan deriveres med mye enklere regler. Denne gjelder bare når *x* er både oppe og nede: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ **NB: Husk på at TI-nspire kan derivere alle uttrykk, akkurat som GeoGebra!**	24/1

Kladd	Innhold	Dato
5.33 **5.34 (U)**	**5.10 – Bevis for to derivasjonsregler:** Å finne fram til derivasjonsreglene er en ganske tøff jobb. Utgangspunktet er i de aller fleste tilfellene å bruke definisjonen for derivasjon: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ I læreboka står utledninga for setningene i 5.6 og 5.8. Men metoden kan også brukes på et vanlig derivasjonsstykke, f.eks: $f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3-2x^3}{\Delta x} =$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3+2\cdot 3x^2\Delta x+2\cdot 3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-2x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2+6x\cdot\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x} =$ $\lim_{\Delta x \to 0}(6x^2+6x\cdot\Delta x+\Delta x^2) = 6x^2+6x\cdot 0+0^2 = \underline{\underline{6x^2}}$	**25/1**
5.35, 5.36	**5.11 – Sammensatte eksempler:** Her møter dere større oppgaver som tar for seg mange av teknikkene dere har lært i kapitlet. Det er viktig å se sammenhenger når dere lærer noe, kanskje spesielt i matematikk der alt bygger på noe dere har lært tidligere! Prøv dere på oppgavene!	**25/1**
	Sammendrag av kapitlet - side 178 (Bok R1): Dette er stoff som passer på en huskelapp for kapittel 5. **Test deg selv - side 179 (Bok R1):** Utfør testen på egen hand en stille ettermiddag. Deretter retter du utfra løsningene på side 274 - 276. Klarer du halvparten, har du såvidt klart en 3er! En tredel gir deg ståkarakter og fire femdeler er en 5er! **Øvingsoppgavene til kapitlet - side 180 - 187 (Bok R1):** Fasit side 302 - 307.	
	Innføring: 5.37c, 5.38b, 5.43b, 5.85, 5.96	**28/1**
	Prøve:	**1/2**

Noen utfordringer: Andre runde i Abelkonkurransen er i januar. Her er et par luringer. Alle svar skal være positive hele tall under 1000. Disse er fra januar 2006.

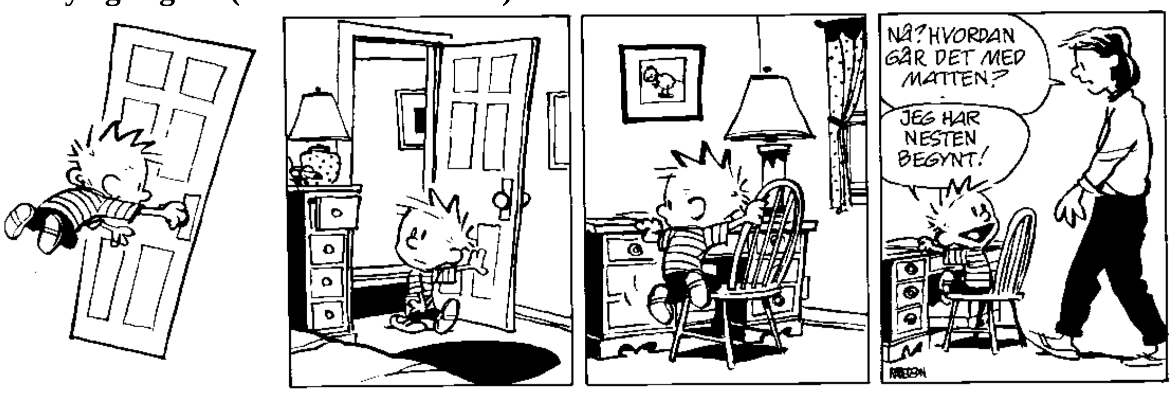
Ola skrev et positivt heltall på tavla. Anna multipliserte det med 11, fjernet det siste sifferet fra svaret og fikk b. Da Per multipliserte b med 7 og fjernet det siste sifferet, fikk han 37. Hvilket tall skrev Ola først?

$ABCD$ er et trapes der AB og CD er parallelle sider (se figur). AB har lengde 10 og CD lengde 6. Høyden i trapeset er 4. La P være midtpunktet på AD og Q midtpunktet på BP. Finn arealet av trekanten PQC.



Tre ektepar er på kino og sitter på seks seter på rad. På hvor mange måter kan de seks personene plasseres uten at noen ektefeller sitter ved siden av hverandre?

Tommy og Tigern (Calvin and Hobbes):



T & T bind 3 side 165ø