

Tempoplan: Kapittel 5: 2/1 – 1/2. Kapittel 6: 1/2 – 1/3. Kapittel 7: 1/3 – 1/4. Resten av tida – repetisjon og prøver.

4: Algebra

Algebra omfatter tall- og bokstavregninga i matematikken. Et viktig grunnlag for dette kapitlet er likningsløsning. Andregradslikninga lot seg løse – slik dere kjenner til – for over 1000 år sia. Tredje- og fjerdegradslikninga lot seg løse på 14- og 1500-tallet. Og femtegradslikninga er uløselig, noe som blei bevist først på 1800-tallet. Her er litt stoff:

<http://matematikk.nordreisa.net/fagstoff/likninger.htm>

Vi skal bygge videre på det dere har lært tidligere: Dere skal få full kontroll over andregradsuttrykk med x , og vi skal innom x -uttrykk av høyere grad, både som likninger og som ulikheter. Fordi vi "bare" kan løse likninger av andre grad, må vi bruke spesielle teknikker for å få andre uttrykk redusert til andregradsuttrykk. Faktorisering blir viktig, og vi skal til og med utføre divisjon av et x -uttrykk med et annet. Et viktig hjelpemiddel vi skal bruke, er fortegnslinjer: Kompliserte ulikheter løses ved å finne ut når et uttrykk er større eller mindre enn null, dvs. positivt eller negativt. Vi skal også innom logaritmer igjen, der det dukker opp et nytt logaritmesystem med andre grunntall enn 10: Vi skal lære om et spennende tall e – som dere kan finne på kalkulatoren! Hva med et eventyr?

<http://matematikk.nordreisa.net/fagstoff/likninger.htm#Likningseventyr>

Tommy og Tigern:



Bind 2, side 124ø

Kladd	Innhold	Dato
4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5	<p>4.1 – Andregradsuttrykk: Vi lærte to formler som har med andregradsuttrykk å gjøre i fjor:</p> <p>Løsning av andregradslikninga: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$</p> <p>Faktorisering av andregradsuttrykket: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$</p> <p>Der vi bruker løsningene av andregradslikninga.</p>	8/11
Husk innføringa: 3.102, 3.107, 3.125		12/11
Prøve uten hjelpemidler!		12/11
4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 (U)	<p>4.2 – Polynomdivisjon: Her er sammenhengen mellom den divisjonen med tall dere kan fra før og divisjon med polynomuttrykk:</p> <p>Fra før av kan dere dividere to tall med hverandre:</p> $34217 : 5 = 6843 \frac{2}{5}$ $\begin{array}{r} 30 \\ \cdot 42 \\ \cdot 40 \\ \dots 21 \\ \dots 20 \\ \dots 17 \\ \dots 15 \\ \cdot R = 2 \end{array}$ <p>Her blir resten 2 og dere kan lage blanda tall ved å dele resten på divisoren 5 og få 2/5.</p>	12/11

Kladd	Innhold	Dato
forts.	<p>Skal dere dividere helt ferdig, må dere bruke komma i stedet, og legge til nuller:</p> $34217 : 5 = \underline{6843,4}$ $\begin{array}{r} 30 \\ \cdot 42 \\ \cdot 40 \\ \dots 21 \\ \dots 20 \\ \dots 17 \\ \dots 15 \\ \dots 2,0 \\ \dots 2,0 \\ \dots 0 \end{array}$ <p>Vi kan bruke samme teknikk for å dividere to polynomer på hverandre:</p> $\frac{3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x - 1} =$ $(3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = 3x^3 - 1x^2 + 1x - 1 = \underline{3x^3 - x^2 + x - 1}$ $\begin{array}{r} 3x^4 - 3x^3 \\ -1x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ -1x^3 + 1x^2 \\ 1x^2 - 2x + 1 \\ 1x^2 - 1x \\ -1x + 1 \\ -1x + 1 \\ 0 \end{array}$ <p>Polynomene er ordna på vanlig måte. Vi skal dividere vekk ledd for ledd, ikke siffer for siffer. Derved må x gå opp i $3x^4$, og vi må multiplisere x med $3x^3$ for å få til det. Dette kan vi ikke gjøre uten å multiplisere -1 med $3x^3$ også. Deretter må vi ta det uttrykket vi lagde, $3x^4 - 3x^3$, og trekke fra det opprinnelige uttrykket. Så begynner vi igjen, finner hva vi må gange med $-$ det resultatet legges til det vi hadde fra før $-$ og trekker et nytt uttrykk fra, ser hva som blir igjen osv. Dersom resten til slutt blir 0, har divisjonen gått opp $-$ og vi har faktisk klart å forkorte en brøk uten å faktorisere først! (Se eksemplet over.)</p>	12/11
	<p style="text-align: center;">TI-nspire:</p> <p>Vi kan finne løsninger på likninger med Løs eller Solve:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Eksempel 1 løser likning uten bruk av abc-formelen. • Eks. 2 ganger sammen faktorene fra eksempel 1, og dere er tilbake i utgangspunktet. • Eks. 3 dividerer polynom, men gir bare svaret. • Eks. 4 løser tredjegradslikning ved å gi svar. • Eks. 5 faktorerer et uttrykk uten å regne ut! • Vi kan også bruke Solve på ulikheter. Ulikhetstegn finner dere på tastaturet og på menyen øverst. 	$\text{solve}(2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0, x) \quad x = \frac{1}{2} \text{ or } x = 1$ <hr/> $\text{expand}\left(2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)\right) \quad 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$ <hr/> $\frac{2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 5}{x - 1} \quad 2 \cdot x^2 - x + 5$ <hr/> $\text{solve}(2 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 42 = 0, x) \quad x = -3 \text{ or } x = 1 \text{ or } x = 7$ <hr/> $\text{factor}(2 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 42) \quad 2 \cdot (x - 7) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$
4.12, 4.13, 4.14 4.15(U)	<p>4.3 – Nullpunktsetninga. Faktorisering: Hvis vi setter inn en verdi a for x i et funksjonsuttrykk og får verdien 0, betyr det det samme som at vi kan dividere funksjonsuttrykket med faktoren $(x - a)$, og divisjonen går opp. Og omvendt! Denne kunnskapen kan vi naturligvis bruke til å faktorisere et funksjonsuttrykk, og faktorisering av uttrykk er alltid nyttig, ikke bare for å forkorte!</p>	15/11

Kladd	Innhold	Dato
4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 4.21 (P)	<p>4.4 – Likninger og ulikheter med polynomer: I fjor hadde vi 4 sider om fortegnslinjer:</p> <p>8.1 - Fortegnslinjer: Fortegnslinja er rett og slett en grei beskrivelse av fortegnet til et matematisk uttrykk (med en variabel) eller av fortegnet til en graf!</p> <p>8.2 – Ulikheter:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ordne ulikheten sli at det blir null på høyre side. 2. Finn ut når venstre side er lik null. 3. Merk av nullpunktene på fortegnslinja. 4. Finn fortegnene for uttrykket mellom alle nullpunktene. <p>Les av svaret og skriv det ned. Punkt 2. kan vi gjøre ved å finne alle faktorene i uttrykket og skrive inn fortegnet for hver av dem før vi slår alle fortegnene sammen. <i>Det er mange måter å analysere fortegn på. Men det viktigste er alltid å finne ut der fortegn kan skifte fra pluss til minus. Dette skjer i nullpunkt og på steder der uttrykket ikke eksisterer, for eksempel når vi har null i nevner.</i> Både EQUA og TABLE er nyttige på kalkulatoren! Undersøker vi en vektor langs x-aksen, lager vi en horisontalprojeksjon.</p>	19/11
Prøve i kapittel 3 – alle hjelpemidler!		19/11
4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27 4.28 (U) 4.29 (U)	<p>4.5 – Likninger løst ved substitusjon. Brøkligninger: Når vi kan gjøre en ”umulig” likning om til en mulig ved å skifte ut ett uttrykk i likninga med et annet, kaller vi det for substitusjon. Dere gjorde det i første klasse i noen oppgaver:</p> $3(lgx)^2 - 2lgx - 1 = 0 \Rightarrow lgx = z \Rightarrow 3z^2 - 2z - 1 = 0$ $\Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \frac{1 \pm 2}{3} \Rightarrow z_1 = 1 \wedge z_2 = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow lgx_1 = 1 \wedge lgx_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 10 \wedge x_2 = 10^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x_1 = 10 \wedge x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$	19/11
<p style="text-align: center;">TI-nspire:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Hvis vi skriver inn $\log(5)$, vil TI-nspire gjøre om uttrykket til $\log_{10}(5)$ og oppgi svaret. ”log” betyr logaritmen med 10 som grunntall, og det oppgis med 10 som indeks. • Hvis dere vil bruke et annet grunntall, for eksempel 2, får dere sjansen fra kalkulatoren i TI-nspire, og må skrive $\log_2(8)$ og får svaret 3. • I delkapittel 4.9 møter dere grunntallet 2,71828..., populært kalt e, og kalkulatoren har egen tast ln, men dere kan også godt skrive $\ln(10)$ og får svaret 2,30259 dersom dere holder nede <ctrl>. <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> $\text{solve}\left(3 \cdot \left(\log_{10}(x)\right)^2 - 2 \cdot \log_{10}(x) - 1 = 0, x\right)$ $x = \frac{2}{10^3} \text{ or } x = 10$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> $\text{solve}\left(3 \cdot \left(\log_{10}(x)\right)^2 - 2 \cdot \log_{10}(x) - 1 = 0, x\right)$ $x = 0.464159 \text{ or } x = 10$ </div> </div>		
4.30, 4.31, 4.32, 4.33 4.34 (U)	<p>4.6 – Brøkulikheter: Vi løser dem akkurat som vi løser polynomulikheter – med fortegnslinje.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ikke multipliser bort nevneren med x i ulikheter – strengt ulovlig! 2. Skaff deg null på høyre side og slå sammen brøkene til én på venstre side. 3. Faktoriser teller og nevner for seg. 4. Sett dem inn i fortegnsskjema slik du er vant til. 5. Husk at null i nevner gir tull – marker det på fortegnslinja! 6. les av svaret på ulikheten som vanlig! 	22/11
Polynomuttrykk – litt oppsummering:		
<p>Matematiske uttrykk med tall og bokstaver og flere ledd kalles polynomer. (Poly = mange eller flere.) Kapitlet hjelper dere til å faktorisere for å finne når uttrykkene er null eller større eller mindre enn null. Fra før av har dere lært å behandle brøkuttrykk og første og andre grad med vanlig faktorisering og ved bruk av abc-formelen.</p> <p>Når vi har høyere grad enn 2, må vi bruke noen knep: Hvis vi veit en faktor, kan den divideres vekk for å finne ”hva som er igjen”. Til det trenger vi polynomdivisjon. Vi kan også sjekke so m divisjonen går opp ved innsetting.</p> <p>Eksempel: Faktoriser $-x^3 - 2x^2 + 5x + 6$. Fordi dette er tredje grad, må vi kjenne en faktor – som er det samme som å kjenne ett nullpunkt. Vanligvis får vi oppgitt en faktor/ett nullpunkt. Hvis ikke, må vi faktisk gjette. Sia vi ikke kan teste alle tall, går vi løs på konstantleddet +6: Heltallige faktorer <i>må</i> gå opp i 6, og blir altså 1, -1, 2, -2, 3 eller -3. Og for å ”få vekk” denne faktoren, dividerer vi uttrykket med henholdsvis $(x - 1), (x + 1), (x - 2), (x + 2), (x - 3)$ eller $(x + 3)$. Det raskeste er likevel å sette inn ei av løsningene, slik: Vi tester $x = 3$: $-3^3 - 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 6 = -27 - 18 + 15 + 6 = -24$ 3 er ingen løsning. Vi tester $x = 2$: $-2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$ 2 er ei løsning! Vi dividerer vekk denne faktoren: $(-x^3 - 2x^2 + 5x + 6) : (x - 2) = -x^2 - 4x - 3$ Nå står vi igjen med et annengradsuttrykk som skal faktorerises, og det gjør vi med abc-formelen ved å sette uttrykket lik 0: $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{-2} = -2 \mp 1$ Vi får altså to faktorer til, der $x = -3$ og $x = -1$. De tre faktorene blir dermed</p>		

$(x - 2)$, $(x + 3)$ og $(x + 1)$. Dessuten står det minustegn foran det første leddet, x^3 , og dette tallet, -1 , må også være med. Ferdig faktorisert: $-x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = \underline{\underline{-1(x - 2)(x + 3)(x + 1)}}$

Anvendelse:

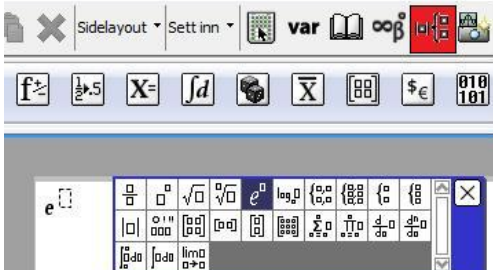
- Løsning av likninger
- Løsning av ulikheter – faktorene setter vi på fortegnslinjer
- Å finne fellesnevner
- Forkorting av brøker

Husk også på:

Både GeoGebra og TI-nspire gir fasitsvara på oppgaver av denne typen:

- Vi kan tegne opp uttrykk som grafer i GeoGebra og finne nullpunkter
- Vi kan sette uttrykk lik hverandre og lese av skjæring (likhet)
- Eller der den ene er over eller under den andre (ulikhet)
- Vi kan faktorisere i TI-nspire med **factor**
- Og vi kan løse likninger og ulikheter med **solve**

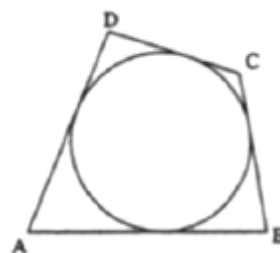
Kladd	Kladd	Innhold
4.35, 4.36, 4.37 4.38 (U) 4.39 (P)	<p>4.7 – Logaritmesetningene: Dette er repetisjon fra i fjor.</p> $a^p = a^q \Rightarrow p = q$ $10^x = a \Rightarrow x = \log a$ $a^x = b \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$ <p>Logaritmesetningene følger potenssetningene. Her er alle 3:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ 2. $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ 3. $\lg a^x = x \lg a$ 	29/11
4.40, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44 4.45 (U)	<p>4.8 – Likninger med logaritmer: Her gjelder det å bruke de tre logaritmesetningene baklengs. Og husk på at vi kan gjøre det samme på begge sider av et likhetstegn, bare vi gjør det med ”hele venstre side” og ”hele høyre side”.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$ 2. $\lg a - \lg b = \lg\left(\frac{a}{b}\right)$ 3. $x \lg a = \lg a^x$ <p>Ei likning løses slik: $\lg x = c \Rightarrow 10^{\lg x} = 10^c \Rightarrow x = 10^c$</p>	30/11
Prøve uten hjelpemidler!		3/12
4.46, 4.47, 4.48, 4.49 4.50 (U) 4.51 (P)	<p>4.9: – Tallet e. Naturlige logaritmer: Uttrykket $(1 + t)^{\frac{1}{t}}$ nærmer seg et mystisk uttrykk $(1 + 0)^{\frac{1}{0}} = "1^\infty"$ som ikke er noe matematisk uttrykk. Dessuten veit dere jo at én opphøyd i et tall, uansett hvor stort dette tallet er, bare kan bli én. Prøv å sette inn veldig små tall for t og se hva som skjer!</p> <p>Deretter kan dere slå inn <shift> ln 1 <EXE> på kalkulatoren: Dere har nå funnet det mystiske tallet e som vi ofte skriver som e men som er i nærheten av 2,718281828...</p> <p>En tur på internett gir dere en del stoff om dette tallet. Og matematikere synes det er et like fint tall som π!</p> <p>Vi bruker e som grunntall i et ”naturlig” logaritmesystem! (Grunntallet 10 er ikke naturlig, bare et tilfeldig valgt tall fordi menneskeheten i vår moderne verden – ikke blant urbefolkning nødvendigvis – liker 10-tallsystemet, sannsynligvis fordi vi har 10 fingre og tær. I Andeby burde tallsystemet egentlig vært 8-tallsystem.) Og for å skille fra de briggske logaritmene, skriver vi denne logaritmen med ln – se kalkulatoren. Og så virker alt dere har lært tidligere om logaritmer!</p> <p>Logaritmesetningene følger potenssetningene. Her er alle 3:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ 2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ 3. $\ln a^x = x \ln a$ 	3/12

Kladd	Innhold	Dato
4.52, 4.53, 4.54, 4.55, 4.56 4.57 (U)	4.10 – Likninger med naturlige logaritmer: Her gjelder det å bruke de tre logaritmesetningene baklengs, som sist. Og husk på at vi kan gjøre det samme på begge sider av et likhetstegn, bare vi gjør det med ”hele venstre side” og ”hele høyre side”. 1. $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$ 2. $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ 3. $x \ln a = \ln a^x$ Ei likning løses slik: $\ln x = c \Rightarrow e^{\ln x} = e^c \Rightarrow x = e^c$	6/12
TI-nspire og naturlige logaritmer:		
<p>Programmet skjønner \ln når du skriver $\ln()$ og fyller parentesen med uttrykk eller tall.</p> <p>Skal du ha tak i e-uttrykk, må du enten ta det fra kalkulatoren, samme tast som \ln-tasten: e^x eller fra menyene – se til høyre.</p> <p>Du kan også hente e direkte ved å skrive $@e^$ i TI-nspire.</p>		
		
4.58, 4.59, 4.60, 4.61, 4.62 4.63 (U)	4.11 – Uttrykk og likninger med tallet e: Vi kan gjøre om alle tall til en potens med e som grunntall. $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a} = e^{(\ln a) \cdot x}$ Og vi kan løse likninger med x i eksponent med naturlige logaritmer også: $a^x = b \Rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$, et uttrykk eller en metode dere kjenner igjen! Husk også på at: $e^x = b \Leftrightarrow \ln e^x = \ln b \Leftrightarrow x \ln e = \ln b \Leftrightarrow x = \ln b$	7/12
Prøve uten hjelpemidler!		
4.64, 4.65, 4.66 4.67 (U)	4.12 – Ulikheter med eksponentialfunksjoner og logaritmer: Akkurat som med polynomer og brøker må vi kartlegge hvordan fortegnet forandres når vi lar x gå gjennom hele definisjonsmengden! Husk også på at de vanlige ulikhetsreglene gjelder: Noen ulikheter kan regnes ut direkte bare dere har styring på fortegn når dere ganger og deler med ulike verdier.	3/12 10/12
4.68, 4.69	4.13 – Sammensatte eksempler: Her møter dere større oppgaver som tar for seg mange av teknikkene dere har lært i kapitlet. Det er viktig å se sammenhenger når dere lærer noe, kanskje spesielt i matematikk der alt bygger på noe dere har lært tidligere! Prøv dere på oppgavene!	10/12
Sammendrag av kapitlet - side 144 (Bok R1): Dette er stoff som passer på en huskelapp for kapittel 4.		
Test deg selv - side 145 (Bok R1): Utfør testen på egen hand en stille ettermiddag. Deretter retter du ut fra løsningene på side 270 - 273. Klarer du halvparten, har du såvidt klart en 3er! En tredel gir deg ståkarakter og fire femdel er en 5er!		
Øvingsoppgavene til kapitlet - side 146 - 153 (Bok R1): Fasit side 297 - 302.		
Innføring: 4.124, 4.132, 4.133j, 4.135g		10/12
Prøve:		13- 17/12

Noen utfordringer:

Her er noen morsomme oppgaver fra andre runde (!) i Abelkonkurransen. **Klarer dere dem, er dere gode!** (Det kan være nyttig å tenke gjennom dem med tanke på vårt pensum også: I kapittel 2 skulle dere jo bevise en del vriene saker.) Alle svar skal være positive hele tall under 1000.

Figuren viser en firkant $ABCD$ som er omskrevet en sirkel. Hvis $AB = 119$, $BC = 95$ og $CD = 64$, hvor lang er da sidelengden AD ?



I et mørkt rom er det 20 svarte, 30 grønne, 40 hvite og 50 brune sokker. Hvor mange sokker må du minst ta for å være sikker på å få minst 5 par? (Et par består av to sokker av samme farge.)

I en sirkel med radius 13 ligger et punkt P med avstand 12 til sentrum. Hvor mange korder gjennom P har heltallig lengde? (En korde er et linjestykke som forbinder to punkter på sirkelbuen.)

En rektangulær kasse har sideflater med arealer 84 cm^2 , 70 cm^2 og 30 cm^2 . Hva er da volumet av kassa (i cm^3)?

Tommy og Tigern (Calvin and Hobbes):



T & T bind 2 side 242m

8. november 2010

Thor & Hans