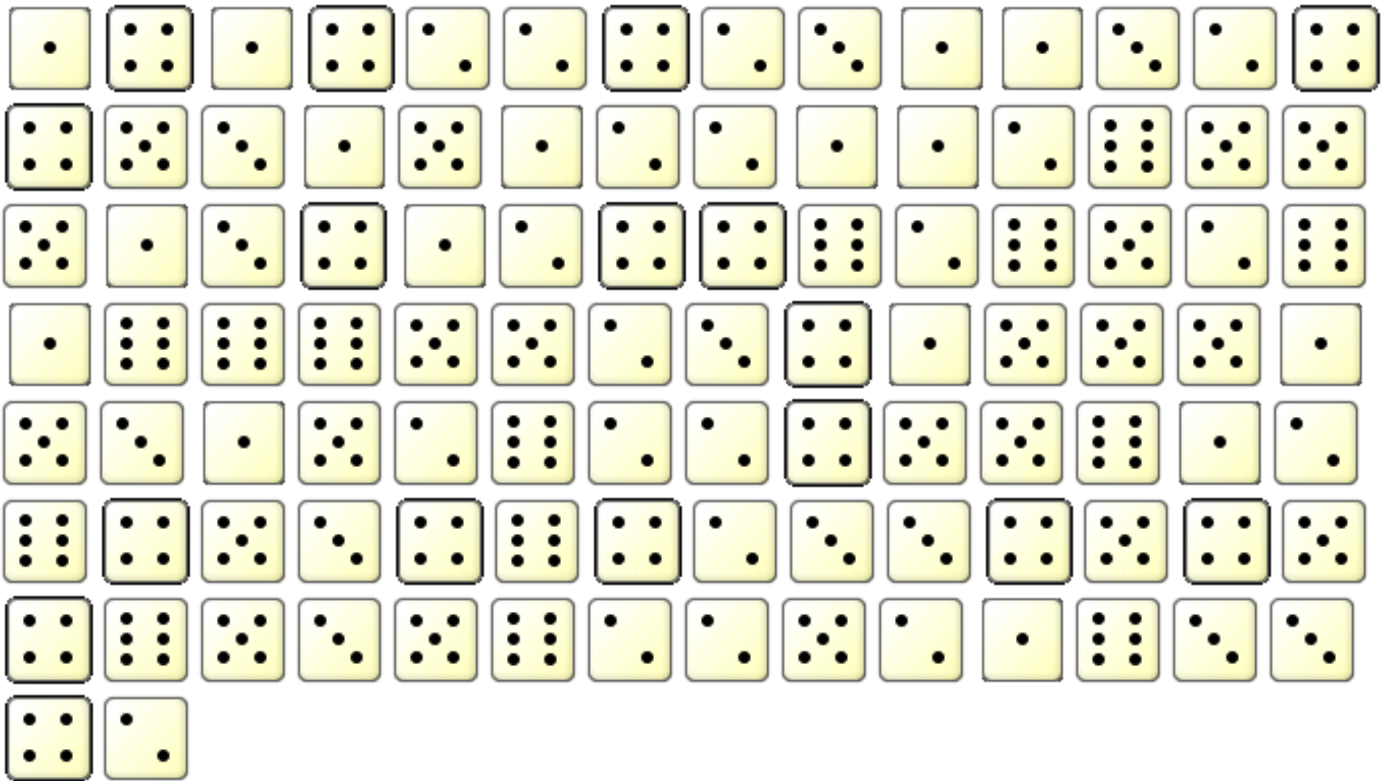


## 2: Bevis og bevisføring: 17. september - 5. oktober 2010

**Tempoplan:** Kapittel 2: 18/9 - 4/10. Kapittel 3: 4/10 - 1/11. Kapittel 4: 1/11 - 6/12.

Kapittel 5: 2/1 - 1/2. Kapittel 6: 1/2 - 1/3. Kapittel 7: 1/3 - 1/4. Resten av tida blir repetisjon og prøver.

Her møter dere teoretisk matematikk. Hvordan kan en matematiker logisk bevise at noe er sant – eller usant? Tenk dere at dere kaster en terning og vil finne ut hvor mange ganger hver av de 6 mulighetene inntreffer. Forsøksrekka blir kanskje slik:



Praktikeren vil "se" at det blei 17 enere, 19 toere, tolv treere, 17 firere, 21 femmere og 14 seksere av i alt 100 kast. Generering av "tilfeldige" terningkast kan gjøres på mange måter:

**Casio:** En moderne kalkulator kan randomisere, lage tilfeldige tall utfra en formel som tar utgangspunkt i et tall som tilfeldigvis ligger i kalkulatoren. Int ( 6 Ran# + 1) EXE. Du får ett tall for hver EXE.

**Internett:** Eller du kan gjøre som jeg har gjort denne gangen: Bruk [www.random.org/dice/?num=12](http://www.random.org/dice/?num=12) og tell opp. Hvis praktikeren fortsetter å kaste og telle, vil han anta at han får rundt 17% av hvert resultat, og vil være fornøyd med at dette er *et godt nok svar*.

**TI-nspire:** Programmet er ekspert på å plukke tilfeldige tall – se til høyre. Og 2, eller egentlig 4, metoder er høvelige:

- rand() gir oss ett tilfeldig tall fra og med 0 til og med 1.
- randInt(nedre grense, øvre grense) gir oss ett tilfeldig heltall fra og med nedre og til og med øvre grense.

rand()	0.943597
randInt(0,100)	40
rand(10)	{ 0.995466, 0.20034, 0.79807, 0.951898, 0.220978, 0.369481, 0.007839, 0.935159, 0.10801 }
randInt(0,100,10)	{ 81, 75, 64, 71, 33, 89, 1, 32, 54, 82 }

- rand(10) gir oss 10 tilfeldige tall fra og med 0 til og med 1.
- Og randInt(0,100,10) gir oss 10 tilfeldige heltall fra og med 0 til og med 100. Øvre og nedre grense og antall tall kan naturligvis endres.
- Kast terning 100 ganger:

randInt(1,6,30)      { 6, 3, 3, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 6, 6, 3, 3, 6, 3, 5, 6, 1, 4, 6, 6, 4, 3, 6, 1, 5 }

Utfra å telle opp terningkast og regne ut hvor hyppig 6eren forekommer, vil fysikere, kjemikere, biologer, medisiner, historikere, psykologer, samfunnsvitere - ja til og med noen politikere - trekke sine konklusjoner. 19 seksere av 100 kast gir oss en terning der sannsynligheten for 6 er 19%. Og utfra slike konklusjoner får vi teorier om virkeligheten. Darwins utviklingslære er en slik teori, basert på likheter - og ulikheter - mellom dyr og andre levende organismer. Under ser du to hodeskaller av to meget forskjellige fugler. Darwins teori baserer seg på at det fins likheter og årsak til likhetene. Hvilke fugler gjetter du på?



(Klikk på bildet for å finne rett svar.)

Læra om atomer fikk sin form lenge før noen hadde sett et atom. Sia dette er teorier - basert på empiriske slutninger - vil de alltid måtte være klar til å kunne endres når ny viten krever det. Det betyr naturligvis ikke at teorier av denne typen er gale, men at de i mange tilfelle er ufullstendige.

En morsommere teori er sammenhengen mellom avstanden mellom start og slutt på ei elv og den reelle lengden elva renner. Til høyre ser du svingene i Reisa- og Kildalselva når de arbeider seg nedover mot havet. En elveforsker har målt mange elver på jorda, og kommet fram til at forholdet mellom elvas lengde og den korteste avstanden er litt i overkant av 3. Og du kan jo gjette hvilket tall han legger i teorien sin: Forholdstallet er  $\pi$ ! Beviset er empirisk, slik at han ikke kan føre det som et matematisk bevis, ei heller bruke  $\pi$  i formelen, men som teori fungerer formelen ypperlig!

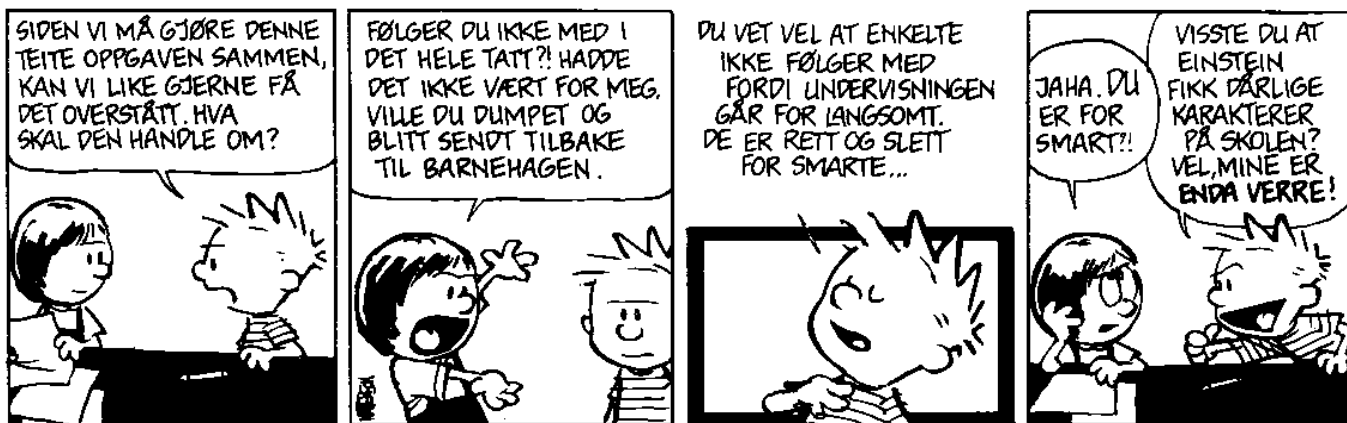


Matematikeren resonnerer på en helt annen måte enn andre vitenskapsmenn og -kvinner. Også han kan få mistanke om en sammenheng. Et godt eksempel på en matematiker med slike mistanker er den indiske tallkunstneren [Ramanujan](#). Ramanujan fant sammenhenger som han ikke kunne eller ville bevise. I de aller fleste tilfellene fant han noe som var rett!

Men en matematiker *kan* og *skal ikke* gi seg før han er absolutt sikker på at det faktisk er slik! I tilfellet med terningene vil matematikeren resonnerer slik: Det er 6 muligheter. Alle 6 mulighetene er like sannsynlige, fordi vi - i matematikken - bare vil bry oss med perfekte terninger. Sannsynligheten for å få ett resultat av de 6, blir derfor eksakt forholdstallet 1:6, eller 1/6 eller  $100/6\% = 16\frac{2}{3}\%$ . Og han vil slutte videre: Generell formel for sannsynlighet blir antall gunstige delt på antall mulige!

Noen vil - med en viss rett - kunne hevde at en matematiker på denne måten skiller seg ganske kraftig fra naturvitenskapsmenn og -kvinner: *Det fins ikke perfekte terninger*. Og empiriske resultater er gode nok, det er for eksempel ingen vits i å vente [358 år](#) på et bevis når vi egentlig "veit" at en påstand holder. Men matematikeren står på sitt.

Og kanskje er matematikk derfor egentlig en grein av filosofien og ikke av naturvitenskapen?

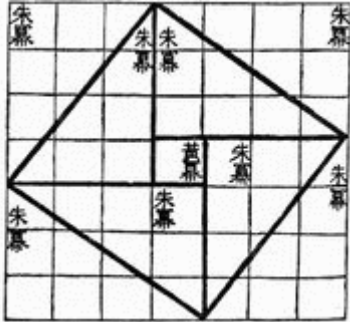


Tommy & Tigern, bind 2, side 121 ø

I praksis trenger vi likevel også matematiske bevis, for eksempel for at Jorda er ei kule, og for størrelsen på Jorda. [Eratostenes](#) (-276 – -194) sine beregninger er en matematiker verdig! Seinere blei dessuten matematiske bevis for [planetenes baner](#) og [Jordas plassering](#) i verdensrommet bannlyst av dem som ville tro framfor å vite. (Det fins stadig en organisasjon som kaller seg [Flat Earth Society](#), og som ikke godtar disse bevisene...)

Dette kapitlet skal dere lære litt om matematiske bevis!

Kladd	Innhold	Dato
1.5 – 1.11	Prøve uten hjelpemidler	17/9
2.1, 2.2	2.1 - Logikk: Holbergs komedie Erasmus Montanus (1723) er ei latterliggjøring av den lærde bondegutten som prøver å overbevise sine foreldre om at Jorda er rund. Han brukte en teknikk fra logikken, kalt <a href="#">syllogisme</a> : Premisser fører fram til en konklusjon.	17/9
2.3, 2.4	2.2 - multiplikasjon: Vi bruker det matematiske tegnet $\Rightarrow$ , implikasjonspila, som betyr at noe logisk sett fører til noe annet, impliserer. Andre tegn er overstrøket implikasjonspil., impliserer ikke og $\neq$ , ikke lik.	20/9
	Innføringa til kapittel 1: 1.139, 1.140, 1.147	20/9
2.5, 2.6, 2.7, 2.8 2.9(U)	2.3 - Ekvivalens: Dere kjenner bruken av implikasjon og ekvivalens fra likningsløsning og fra ulikheter. $x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = 8$ Her er uttrykka på hver side av pila ekvivalente. $\sqrt{x^2 - 3} = -1 \Rightarrow x^2 - 3 = 1$ Her har vi gjort noe vi ikke har full kontroll over, kvadrert på begge sider. Høyre side av implikasjonen følger logisk, men vi har ingen slik generell regel for likninger, og veit ikke om vi kan trekke konklusjonen baklengs. Derfor tør vi ikke sette ekvivalens mellom uttrykka!	21/9
<b>Vi skal ha ei prøve i kapittel 1!</b>		
	Prøve uten hjelpemidler	24/9
2.10, 2.11, 2.12, 2.13 2.14 (U)	2.4 - Irrasjonale likninger: Vi prøver å undersøke hva som videre skjer i forrige eksempel. $\sqrt{x^2 - 3} = -1 \Rightarrow x^2 - 3 = 1$ $\Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ Legg merke til bruken av ekvivalens og implikasjon. Men vi er usikre på om dette er holdbare svar, så vi må faktisk sette prøve på dem begge to: $x = 2$ : VS: $\sqrt{2^2 - 3} = \sqrt{4 - 3} = 1$ HS: $-1$ Feil svar: De to sidene i likninga blei ikke like! $x = -2$ : VS: $\sqrt{(-2)^2 - 3} = \sqrt{4 - 3} = 1$ HS: $-1$ Feil svar igjen! Altså kan vi ikke slutte at svarea er ekvivalente med utgangspunktet. Likninga har ingen svar!  TI-nspire: Legg merke til at TI-nspire bare gir den eller de riktige løsningene, for eksempel: $\text{solve}(\sqrt{3 \cdot x + 4} - 2 \cdot x = -2, x)$ $x = \frac{11}{4}$	24/9
2.15, 2.16, 2.17, 2.18 2.19 (P) 2.20 (U)	2.5 - Bevis: Direkte bevis: De fleste bevis er direkte, hvor slutninger følger direkte av hverandre. En spennende type bevis i den sammenheng, er induksjonsbevisene, der du slutter fra ett enkelttilfelle til alle tilfeller. Men det vanligste likner på empiriske bevis, der du viser at noe stemmer i alle tilfelle, slik at du kan lage en generell lov.	27/9
	Prøve uten hjelpemidler	1/10
2.21, 2.22, 2.23	2.6 - Andre bevisformer: Det fins indirekte måter å bevise noe på. a) Moteksempel: Hvis du kan finne ett eneste moteksempel, ett eksempel der loven ikke stemmer: Da kan ikke beviset være riktig. b) Kontrapositivt bevis: Du antar at konklusjonen er usann, og finner at da er premissene det også. Når du da snur dette på hodet, har du bevist påstanden. c) Ad absurdum-bevis: Du går ut fra det motsatte av det du skal bevise, og viser at det fører til en sjølmotsigelse. Da må også påstanden din være riktig.	1/10

Kladd	Innhold	Dato
2.24, 2.25, 2.26 2.27 (U)	<p>2.7 - Bevis for Pytagoras' læresetning: Dette er den læresetninga som det er satt opp <a href="#">flest ulike</a> bevis for! Her er et berømt kinesisk et som er rundt 2000 år gammelt:</p> <p>Klarer dere å se at det beviser at Pytagoras' setning er riktig?</p> 	4/10
2.28, 2.29, 2.30	<p>2.8 – Sammensatte eksempler: Her møter dere større oppgaver som tar for seg mange av teknikkene dere har lært i kapitlet. Det er viktig å se sammenhenger når dere lærer noe, kanskje spesielt i matematikk der alt bygger på noe dere har lært tidligere! Prøv dere på oppgavene!</p>	5/10
	Prøve uten hjelpemidler	8/10
<p>Sammendrag av kapitlet - side 68 (Bok R1): Dette er stoff som passer på en huskelapp for kapittel 2.  Test deg selv - side 69 (Bok R1): Utfør testen på egen hand en stille ettermiddag. Deretter retter du ut fra løsningene på side 265 - 266. Klarer du halvparten, har du såvidt klart en 3er! En tredel gir deg ståkarakter og fire femdeler er en 5er!  Øvingsoppgavene til kapitlet - side 70 - 75 (Bok R1): Fasit side 290 - 292.</p>		
<b>Innføring til kapitlet: 2.57, 2.59, 2.69, 2.70</b>		<b>8/10</b>
Prøve i kapitlet ...		

### Tommy & Tigern



Tommy & Tigern, bind 2, side 121, midten